Lattes

Equazioni di 1° grado

$$a(x)+b=0$$

Identità ed equazioni

L'**identità** è un'uguaglianza fra due espressioni algebriche, di cui almeno una letterale, che è verificata qualunque sia il valore attribuito alla lettera o alle lettere che vi compaiono.

$$\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = \mathbf{3}\boldsymbol{x}$$

attribuendo, per esempio, alla lettera x i valori 0, + 3, – 3 otteniamo:

- se $x = 0$ $\quad 2 \cdot 0 + 0 = 3 \cdot 0$ $\quad$ quindi $\quad 0 = 0$
- se $x = +3$ $\quad 2 \cdot (+3) + (+3) = 3 \cdot (+3)$ $\quad$ quindi $\quad +9 = +9$
- se $x = -3$ $\quad 2 \cdot (-3) + (-3) = 3 \cdot (-3)$ $\quad$ quindi $\quad -9 = -9$

sostituendo altri valori alla x troveremo ancora delle uguaglianze sempre vere.

Identità ed equazioni

L'**equazione** è un'uguaglianza fra due espressioni algebriche, di cui almeno una letterale, che è verificata solo da particolari valori attribuiti alla lettera o alle lettere che vi compaiono.

$$\mathbf{5x - 2x = 9}$$

Attribuendo, per esempio, alla lettera x i valori -3, 0, $+3$ otteniamo:

- $x = -3$ $\quad 5 \cdot (-3) - 2 \cdot (-3) = 9$ $\quad$ da cui $\quad -9 \neq +9$
- $x = 0$ $\quad 5 \cdot (0) - 2 \cdot (0) = 9$ $\quad$ da cui $\quad 0 \neq +9$
- $x = +3$ $\quad 5 \cdot (+3) - 2 \cdot (+3) = 9$ $\quad$ da cui $\quad +9 = +9$

L'uguaglianza è vera solo attribuendo alla x il valore $+3$.

$x = +3$ è la **soluzione dell'equazione**.

Equazioni

1° membro $\quad 3x + 2 = 2x + 5 \quad$ 2° membro

La lettera ***x*** che figura nell'equazione indica un valore numerico variabile ed è detta **incognita**.
Le incognite si indicano con le lettere *x*, *y*, *z*, …

I numeri che moltiplicano l'incognita sono detti **coefficienti**.
I termini che non contengono l'incognita sono detti **termini noti**.

I valori che, assegnati all'incognita, rendono vera l'uguaglianza si dicono **soluzioni** o **radici dell'equazione**.
Risolvere un'equazione significa determinare tutte le sue soluzioni o radici.

Equazioni

Il **numero di incognite** è il numero di variabili presenti nell'equazione.

Il **grado** di un'equazione a una incognita è dato dall'esponente massimo con cui l'incognita appare nell'equazione:

$4x^3 + 5x^2 = x + 12$ è un'equazione di 3° grado

Un'equazione è **intera** se l'incognita non compare al denominatore; è **fratta** o **frazionaria** se l'incognita è al denominatore:

$9x^2 + x - 1 = 9$ **equazione intera**

$\frac{7}{x+1} + x = 6$ **equazione fratta**

Un'equazione è **numerica** se, oltre alle incognite, non compaiono altre lettere; è **letterale** se ci sono altre lettere oltre alle incognite:

$\frac{7}{8}x^2 + x = \frac{5}{2}$ **equazione numerica**

$2ax^3 + 5ab = abx + 12b$ **equazione letterale**

Equazioni equivalenti e principi di equivalenza

Due o più equazioni sono **equivalenti** quando hanno le stesse soluzioni.

1° PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Addizionando o sottraendo al primo e al secondo membro di un’equazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica si ottiene un’equazione equivalente a quella data.

$\boldsymbol{x + 2 = 5}$ $\boldsymbol{x = 3}$ **è la soluzione**

- Se **addizioniamo** a entrambi i membri uno stesso numero, per esempio **3**, otteniamo:

  $x + 2 + 3 = 5 + 3$ $\boldsymbol{x = 3}$ è ancora la soluzione

  Le due equazioni $x + 2 = 5$ e $x + 5 = 8$ sono equivalenti.

- Se **sottraiamo** a entrambi i membri uno stesso numero, per esempio **1**, otteniamo:

  $x + 2 - 1 = 5 - 1$ $\boldsymbol{x = 3}$ è ancora la soluzione

  Le due equazioni $x + 2 = 5$ e $x + 1 = 4$ sono equivalenti.

Equazioni equivalenti e principi di equivalenza

2° PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero, diverso da zero, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

$\mathbf{2x + 4 = 8}$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{x} \mathbf{= 2}$ **è la soluzione**

- Se **moltiplichiamo** entrambi i membri per **2** otteniamo:

  $2 \cdot (2x + 4) = 2 \cdot 8$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{x} \mathbf{= 2}$ è ancora la soluzione

  Le due equazioni $2x + 4 = 8$ e $4x + 8 = 16$ sono equivalenti.

- Se **dividiamo** entrambi i membri per **2** otteniamo:

  $(2x + 4) : 2 = 8 : 2$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{x} \mathbf{= 2}$ è ancora la soluzione

  Le due equazioni $2x + 4 = 8$ e $x + 2 = 4$ sono equivalenti.

Equazioni equivalenti e principi di equivalenza

APPLICAZIONE DEL 1° PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

- **Regola del trasporto**
  In un'equazione è possibile trasportare un termine da un membro all'altro purché lo si cambi di segno.

  Consideriamo l'equazione:

  $x + 2 = 11$ sottraiamo **2** a entrambi i membri:

  $x + 2 - 2 = 11 - 2$ $x = 11 - 2$

  Il termine **+ 2** è passato dal 1° al 2° membro dell'equazione cambiando il segno.

  Nell'equazione:

  $x - 4 = 13$ addizioniamo **4** a entrambi i membri

  $x - 4 + 4 = 13 + 4$ $x = 13 + 4$

  Il termine **– 4** è passato dal 1° al 2° membro dell'equazione cambiando il segno.

- **Soppressione dei termini uguali**
  In un'equazione se in entrambi i membri figurano termini uguali questi possono essere eliminati.

  $5x - 4 = x - 4 + 7$ per la regola del trasporto otteniamo:

  $5x = x \cancel{- 4 + 4} + 7$ abbiamo eliminato il termine **– 4** che era presente nei due membri.

Equazioni equivalenti e principi di equivalenza

APPLICAZIONE DEL 2° PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

- **Cambiamento dei segni**
  Cambiando il segno a ciascun termine di un'equazione si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

  Consideriamo l'equazione:

  $2 - 3x = -13$ la cui soluzione è $x = 5$

  Se moltiplichiamo per **– 1** entrambi i membri otteniamo:

  $-2 + 3x = +13$ la cui soluzione è $x = 5$

  Le due equazioni sono equivalenti.

- **Riduzione a forma intera**
  Un'equazione contenente termini con coefficienti frazionari può essere ridotta in forma intera moltiplicando tutti i suoi termini per il m.c.m. dei denominatori.

  Consideriamo l'equazione:

  $\frac{1}{2}x - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} - x$ la cui soluzione è $x = 2$

  Moltiplichiamo ciascun termine dell'equazione per il m.c.m. dei denominatori cioè 6:

  $6 \cdot \frac{1}{2}x - 6 \cdot \frac{4}{3} = 6 \cdot \frac{5}{3} - 6 \cdot x$

  Semplificando si ottiene: $3x - 8 = 10 - 6x$ che ha ancora soluzione $x = 2$

  Le due equazioni sono equivalenti e l'ultima è stata liberata dai denominatori, ha cioè i coefficienti interi ed è stata quindi **ridotta a forma intera**.

Risoluzione di un’equazione

Un’equazione si dice **ridotta a forma normale** quando ha le seguenti caratteristiche:

$$ax = b$$

- nel primo membro c’è un solo termine contenente l’incognita;
- nel secondo membro c’è unicamente il termine noto.

La soluzione di un’equazione di 1° grado ridotta a forma normale si ottiene dividendo il termine noto per il coefficiente dell’incognita:

$$x = \frac{b}{a}$$

Risoluzione di un’equazione

Per risolvere un’equazione di 1° grado a un’incognita si può applicare la seguente regola:

- si eseguono le operazioni indicate eliminando le parentesi;
- si eliminano eventuali denominatori moltiplicando ogni termine per il m.c.d.;
- si applica la regola del trasporto portando al 1° membro i termini contenenti la *x* e al 2° membro i termini noti;
- si riducono i termini simili;
- si applica la regola del cambiamento dei segni se il 1° membro è negativo;
- si ottiene l’equazione nella forma normale $ax = b$;
- si determina infine la soluzione $x = \frac{b}{a}$

Verifica e discussione di un'equazione di 1° grado

VERIFICA

L'esattezza della soluzione di un'equazione può essere controllata ricordando che la radice dell'equazione sostituita alla *x* deve rendere il primo membro uguale al secondo.

Tale controllo si esegue considerando uno alla volta i due membri dell'equazione data e prende il nome di **verifica**.

Risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{3}x - \frac{5}{3} = 3 - \frac{5}{3}x \quad \text{si ottiene} \quad x = \frac{7}{3}$$

- Sostituiamo al 1° membro dell'equazione $x = \frac{7}{3}$:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{7}{9} - \frac{5}{3} = \frac{7-15}{9} = -\frac{8}{9}$$

- Sostituiamo al 2° membro dell'equazione $x = \frac{7}{3}$:

$$3 - \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{3} = 3 - \frac{35}{9} = \frac{27-35}{9} = -\frac{8}{9}$$

Verificata l'uguaglianza fra 1° e 2° membro possiamo dire che $x = \frac{7}{3}$ è la soluzione corretta.

Lattes

Verifica e discussione di un'equazione di 1° grado

DISCUSSIONE DI UN'EQUAZIONE DI 1° GRADO

La soluzione dell'equazione $\boldsymbol{ax = b}$ è $\boldsymbol{x = \frac{b}{a}}$ e dipende dai valori assunti da a e b.

Abbiamo i seguenti casi:

- se $\boldsymbol{a \neq 0}$ e $\boldsymbol{b \neq 0}$ — la soluzione è $\boldsymbol{x = \frac{b}{a}}$, l'equazione è **determinata**

  $3x + 5 = 7x - 3$ — la soluzione è $x = 2$

- se $\boldsymbol{a \neq 0}$ e $\boldsymbol{b = 0}$ — la soluzione è $\boldsymbol{x = 0}$, l'equazione è **determinata**

  $5x - 6 = 4x - 6$ — la soluzione è $x = 0$

- se $\boldsymbol{a = 0}$ e $\boldsymbol{b \neq 0}$ — **non esiste soluzione**, l'equazione è **impossibile**

  $2x - 5 = 2x$ — $0 \cdot x = 5$ non ha soluzione

- se $\boldsymbol{a = 0}$ e $\boldsymbol{b = 0}$ — **esistono infinite soluzioni**, l'equazione è **indeterminata**

  $4x - 5 = 3x + x - 5$ — $0 \cdot x = 0$ ammette infinite soluzioni

Equazioni di 2° grado

Le **equazioni di 2° grado** sono quelle in cui il grado massimo dei termini è 2.

$$\underbrace{+x^2}_{\text{termine di 2° grado}} \quad \underbrace{+7x}_{\text{termine di 1° grado}} \quad \underbrace{+3}_{\text{termine noto}} = 0$$

Le equazioni che nella forma tipica presentano solo il termine noto e il termine di 2° grado sono dette **pure**. Un'equazione di 2° grado pura non contiene termini di 1° grado:

$x^2 - 25 = 0$ è un'**equazione pura**

Per **risolvere un'equazione di secondo grado** si eseguono, come nelle equazioni di 1° grado, una serie di passaggi che conducono a un'equazione nella forma normale equivalente a quella data, per esempio:

$-5x + x(4x + 3) = -2x + 49$	si eliminano le parentesi
$-5x + 4x^2 + 3x = -2x + 49$	si applica la regola del trasporto
$-5x + 4x^2 + 3x + 2x = +49$	si riducono i termini simili
$+4x^2 = +49$	equazione in forma normale

Equazioni di 2° grado

In generale, un'equazione pura di 2° grado si può scrivere in forma normale:

$$\boldsymbol{ax^2 = b} \qquad \text{con } a \neq 0$$

e la sua formula risolutiva è:

$$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

- Se $\boldsymbol{\frac{b}{a} > 0}$ l'equazione ammette **due soluzioni opposte**:

$$\boldsymbol{x_1 = +\sqrt{\frac{b}{a}}} \qquad \boldsymbol{x_2 = -\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

- Se $\boldsymbol{\frac{b}{a} < 0}$ l'equazione si dice **impossibile** cioè non ammette soluzioni in quanto nell'insieme **R** non esiste la radice quadrata di un numero negativo.

Risoluzione di problemi mediante equazioni

Le fasi del procedimento da seguire per **risolvere un problema con un'equazione** sono:

- lettura e comprensione del testo per individuare i **dati** e costruire la relativa tabella;
- scelta dell'**incognita**, che verrà indicata con x. In quasi tutti i casi conviene scegliere come incognita il dato che viene richiesto dal problema; in alternativa si sceglie come incognita un altro dato non noto e da questo si risale a quello richiesto dal problema;
- costruzione dell'**equazione** risolvente: è la traduzione del problema in simboli e corrisponde a un'uguaglianza in cui vengono espresse le relazioni tra l'incognita x e i dati del problema;
- risoluzione dell'equazione e verifica del **risultato** ottenuto;
- **valutazione della soluzione**. Si deve stabilire se è accettabile la soluzione trovata; se l'incognita indica per esempio il numero di persone che frequenta una palestra, si può accettare come soluzione un numero naturale ma non un numero negativo o decimale.

Lattes